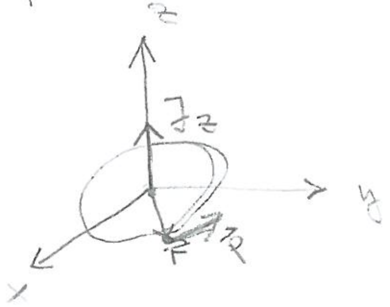
7.11.2014

Rotation

keine 1D Rotation möglich → Teilchen auf einer Kreisbahn 2D
(keine Ausdehnung ...)

Klassisch: Bei der Translation beschreibt der Impuls die Bewegung; bei der Rotation ist es der Drehimpuls J

$\vec{J} = \vec{p} \times \vec{r} = m\vec{v} \times \vec{r}$



Bewegung in der x,y-Ebene

$\vec{J}_z = \vec{p}\vec{r}$

Potentielle Energie $V(x) = 0$

Teilchen hat nur kinetische Energie

$E_{kin} = \frac{p^2}{2m}$ mit $p = \frac{J_z}{r}$

$E_{kin} = \frac{J_z^2}{2mr^2}$

Trägheitsmoment $I = mr^2$ (Masse bei Translationsbewegung)

$E_{kin} = \frac{J_z^2}{2I}$

Quantenmechanisch:

Ursprung der Rotationsquantelung: De Broglie Beziehung

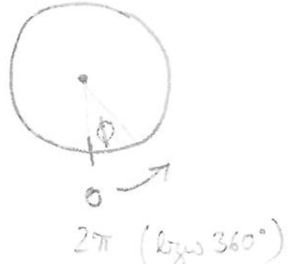
$p = \frac{h}{\lambda}$

$\Rightarrow J_z = pr = \frac{hr}{\lambda}$

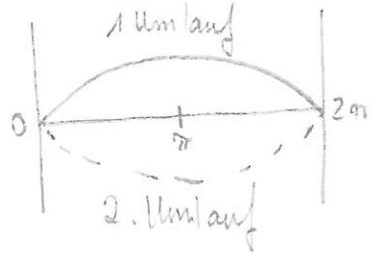
$\Rightarrow$ Je kleiner r desto kleiner J_z (λ = konst.)

Je kleiner λ desto größer J_z (r = konst)

Wellenfkt in Abhängigkeit des Rotationswinkels ϕ

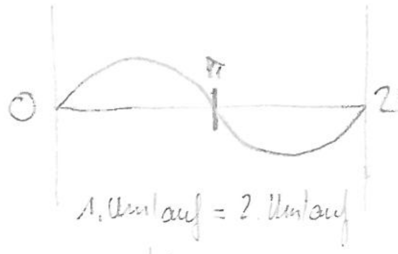


a)



totale Auslöschung durch destruktive Interferenz

b)



etc.

konstruktive Interferenz

$\Longrightarrow$ Wellenfkt muss bei sukzessiven Umläufen immer wieder den selben Wert annehmen

$$\lambda = \frac{\text{Umfang}}{m_\ell} = \frac{2\pi r}{m_\ell} \qquad m_\ell = 0, 1, 2, 3, \ldots$$

Rotationsquantenzahl

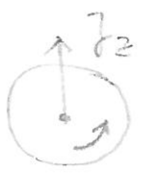
(Anmerkung $m_\ell = 0 \longrightarrow$ unendliche Wellenlänge und damit überall gleiche Auslenkung)

$\Longrightarrow$ Drehimpuls. $J_z = \frac{h r}{\lambda} = \frac{h \cdot r \cdot m_\ell}{2\pi r} = m_\ell \cdot \frac{h}{2\pi}$

$= m_\ell \hbar$

mit $m_\ell = 0, \pm 1, \pm 2, \pm 3, \ldots$

a)



für $m_\ell > 0$ entgegen dem Uhrzeigersinn

b)

J_z für $m_\ell < 0$ mit dem Uhrzeigersinn

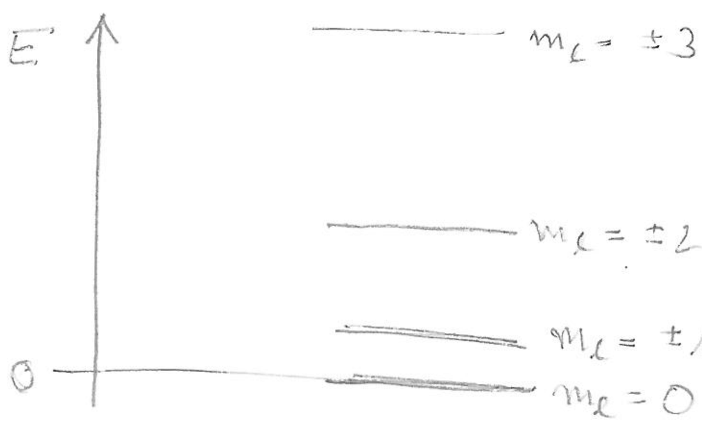
Quantelung der Energie:

$$E_{m_l} = \frac{J_z^2}{2I} = m_l^2 \cdot \frac{\hbar^2}{2I^2} \qquad \text{mit } m_l = 0, \pm 1, \pm 2, \ldots$$

$E_{m_l} \sim m_l^2$ → 2 Bewegungszustände (mit/gegen den Uhrzeigersinn) haben die selbe Energie
→ Entartung des Energieniveaus

→ alle Zustände mit $|m_l| > 0$ sind zweifach entartet

$m_l = 0$ ist nicht entartet



Die zugehörige Wellenfkt.: $\Psi_{m_l} = \underbrace{\left(\frac{1}{2\pi}\right)^{1/2}}_{\text{Normierungskonstante}} e^{i m_l \phi}$

$$\Psi_{m_l = 0} = \left(\frac{1}{2\pi}\right)^{1/2} = \text{konst.}$$

→ für alle Winkel der gleiche Wert → Ort unbestimmt

Impuls genau definiert (= 0)

→ Energie (= 0)